

# APRENDER A ENSEÑAR GEOMETRÍA CON RECURSOS INFORMÁTICOS

Concepción Abaira/ *Universidad de León*  
Alexander Maz/ *Universidad de Granada*

## I. INTRODUCCIÓN

El impacto de las nuevas tecnologías en la sociedad, y con ello su influencia en el entorno educativo conlleva a implementarlas tanto en el aula con los alumnos como en la formación de los futuros profesores de matemáticas. La integración de estas nuevas tecnologías debe estar en el plano de su utilización como recursos didácticos, teniendo en cuenta la influencia que éstas ejercen sobre los alumnos desde el exterior de la escuela.

Bajo la denominación *Nuevas Tecnologías* se consideran fundamentalmente las calculadoras, el ordenador, el vídeo, la radio y la televisión. Centraremos la atención en el ordenador.

## II. EL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

En la actualidad los estudiantes pueden explorar la geometría euclídea usando programas informáticos, de modo que puedan sentir el control de la materia y, con ayuda, redescubrir la mayor parte de los teoremas por ellos mismos, incluso a veces a encontrar las pruebas. Con el uso de programas de ordenador es posible dar vida de nuevo a la geometría, cuya importancia ha vuelto a ser reconocida. El ordenador nos ofrece medios para implementar nuestro modelo abstracto del trabajo real y proporciona una ayuda para aprender geometría. Con él los estudiantes puede llegar a desarrollar (Abaira, 2000):

- Pensamiento independiente y pensamiento lógico a través de la resolución de problemas y capacidad de trabajo en cuestiones abiertas y cerradas.
- Comprensión espacial (incluyendo tres dimensiones).
- Capacidad para representar objetos geométricos y medir con precisión usando diversos instrumentos, incluyendo los de la geometría tradicional así como programas de ordenador, videos, sensores de movimiento y programas de dibujo.

- Conocimiento y comprensión de figuras geométricas, tanto sólidas como planas.
- Conocimiento y comprensión de transformaciones geométricas así como capacidad para aplicarlas.
- Lenguaje y vocabulario matemático adecuado.
- Tomar conciencia de las conexiones entre la geometría y el resto de las matemáticas, con otras materias escolares y con el mundo real.
- Capacidad para pensar imaginativamente.
- Capacidad para formular, comprobar, generalizar y discutir conjeturas.
- Disposición para encontrar y usar sus propios métodos para resolver problemas
- Sensibilidad hacia el aspecto y la forma y las ideas matemáticas asociadas con ellas.

A continuación mostraremos una descripción general de los programas LOGO y CABRI II, y algunas aplicaciones de estos programas para la enseñanza de la geometría en la educación básica.

### **III. LOGO**

LOGO es un lenguaje de programación creado por Seymour Papert, del Massachusetts Institute of Technology, en los años 60. Tiene su base en la inteligencia artificial y fue diseñado de forma que pueda aprenderse a cualquier edad. Una de las ideas que basaron su elaboración es «low floor, high ceiling», es decir se podría empezar a trabajar con él sin demasiados conocimientos, pero a la vez cada usuario debería poder llegar hasta donde quisiera.

Una de las características más notables es que está traducido a casi todos los idiomas, evitando así los inconvenientes del uso de otro idioma para manejar LOGO. El primer uso de LOGO fue como “motor” de un robot teledirigido llamado “tortuga de suelo”, porque dicho robot tenía ese aspecto. El propósito era resolver problemas elementales; para moverlo había que teclear comandos tales como av50, para que avanzase 50 pasos o gd90, para que girase 90° a la derecha (sentido de las agujas del reloj). Las posibilidades eran avanzar, retroceder, girar derecha y girar izquierda.

También tenía sonido y un lápiz, de modo que era posible dibujar su trayectoria en un papel.

Posteriormente, la tortuga «emigró» a la pantalla del ordenador. Los creadores de LOGO llegaron a convertir la tortuga en un importante componente del lenguaje. Los niños, y más tarde los profesores, podían hablar a la tortuga sin más que teclear los comandos que la hacían mover. Al moverse ellos jugando «a la tortuga» imaginaban cómo se movía ésta. Esto es lo que Papert llamó «sintonía corporal»: la idea era entender cómo funcionan algunos objetos sin más que pensar en su propio cuerpo.

LOGO fomenta las capacidades de resolución de problemas, pensamiento lógico, métodos constructivos, y permite al usuario crear y manipular interactivamente procesos matemáticos. Ahora bien, LOGO no es sólo un elemento capaz de favorecer el desarrollo cognitivo, la capacidad de resolución de problemas, etc. (no es fácilmente demostrable su transferencia a otras áreas). Tampoco es una especie de disciplina mental con un papel similar al que se decía que desempeñaba el latín en otra época. En suma, es un lenguaje vivo que convierte tanto al profesor como a los alumnos en auténticos investigadores, haciendo protagonistas a estos últimos de un proceso de aprendizaje, siempre abierto, del que LOGO es un catalizador.

### ***La geometría de la tortuga***

La geometría de la tortuga es una geometría «desde dentro» en el sentido de que cuando se describe algún camino se hace en relación con la dirección previa (por ejemplo, gira a la derecha, sentido de las agujas del reloj) y no en una absoluta (por ejemplo, gira al este). La geometría de la tortuga tiene dos ventajas principales:

- I. Es más sencillo describir trayectorias en términos relativos que en absolutos. Por ejemplo, en el caso de un cuadrado, si está en posición vertical es relativamente fácil encontrar los vértices, pero no así si está inclinado. Sin embargo, con la tortuga los comandos funcionan igual independientemente de la orientación del cuadrado.
- II. La tortuga geométrica es compatible con la experiencia que tiene el aprendiz de moverse en el mundo: tiene “sintonía” con el cuerpo. Puesto que la tortuga puede pintar la trayectoria es posible hacer desde dibujos elementales, sin más que pensar en el propio desplazamiento, hasta

complejos “monstruos” fractales. También dispone de coordenadas cartesianas y de la posibilidad de poner etiquetas.

Una de las características de LOGO es que, en general, no permite efectuar medidas en unidades conocidas por los niños en. Este «inconveniente», que a veces puede resultar aburrido y arduo, conlleva la ventaja de que potencia la estimación, y es sabido que el cálculo aproximado de distancias es una dificultad para los niños pequeños.

## **USOS DEL LOGO PARA MS-DOS**

### **Componentes básicos**

- La tortuga y su pantalla
- Primitivas (órdenes al ordenador)
- Procedimientos (programas)

### **Observaciones**

- Escribir siempre en minúsculas
- Usar espacios en blanco
- Las dos aspectos anteriores se han mejorado en las últimas versiones
- No es fácil rectificar (salvo programando)
- Si se escribe algo incorrecto, la tortuga dice *no entiendo*

### **Procedimientos**

Los procedimientos son secuencias de órdenes para que el ordenador entienda lo que queremos que haga.

### **Construcción de un programa**

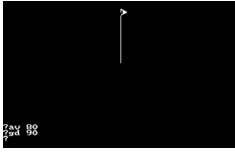
- Teclar la palabra *edita*
- Aparece la palabra *para*
- Escribir el nombre del programa que vamos a construir
- Escribir las órdenes línea a línea
- Teclar la palabra *fin*
- Pulsar F1 para almacenar

### Primitivas básicas

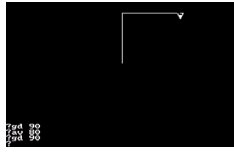
• Orden escrita	Abreviatura	Observaciones
• pantallatexto	pt	
• pantallagraficos	pg	usar pg
• pantallamixta	pm	
• borrapantalla	bp	
• ventana		
• limita		avisa cuando la tortuga
•		está fuera de límites
• escribe "palabra		
• escribe [a b c]		
• escribe "a_b_c		
• escribe 16*3		realiza la operación
• avanza n	av n	avanza n pasos
• retrocede n	re n	retrocede n pasos
• giraderecha n	gd n	gira a la derecha n grados
• giraizquierda n	gi n	gira a la izquierda n grados
• ponpos [x y]		coloca la tortuga en posición
•		indicada
• subelapiz	sl	no dibuja la trayectoria
• bajalapiz	bl	dibuja la trayectoria
• goma		permite borrar
• ocultartortuga	ot	no se ve la tortuga en la
•		pantalla
• muestrartortuga	mt	se ve la tortuga
• repite n [...]		repite n veces lo que está
•		entre corchetes
• centro		sitúa a la tortuga en el centro y
•		en vertical
• guardar "nombre_procedimiento		salva el procedimiento
• adios		salir del programa

### Construcción de un cuadrado con Logo

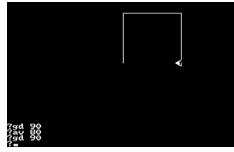
av 80  
gd 90



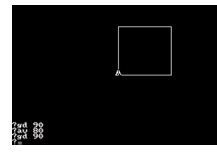
av 80  
gd 90



av 80  
gd 90



av 80  
gd 90



### ACTIVIDADES CON LOGO

Para realizar las actividades planteadas a continuación, puedes ayudarte con estas nuevas órdenes:

BG borrar gráficos

SP sin pluma (se puede mover la tortuga sin que ella trace rastro)

CP con pluma (vuelve a trazar el rastro cuando se mueva)

BM borra las instrucciones colocadas en la zona de mandos

PB pluma de borrar (esta orden cambia el lápiz de la tortuga por la goma, permitiendo borrar un rastro trazado no deseado)

1. Dibuja diferentes triángulos. Procura que queden dibujados al menos uno de cada tipo, de acuerdo con la clasificación según sus lados y/o sus ángulos.
2. Guarda la página con tus figuras utilizando la orden `np " ...`, Significa "nombra página" (considera el formato en el que se ha escrito: la palabra `np`, un espacio, comillas y el nombre de la página sin dejar espacio).

La condición del nombre de la página es que no tenga más de 8 caracteres ni símbolos especiales o espacios.

Aprendamos ahora algunas órdenes para salir del programa o de la página de trabajo:

DOS para salir del programa LOGO una vez que la página tenga nombre.

DEJAPAG significa "deja página" (para salir de una página sin nombre o sin grabar los cambios realizados).

GUARDAPAG para guardar los últimos cambios realizados en una página que ya estaba nombrada.

Deja la página en la que estabas trabajando y elige la opción Nueva Página para comenzar un nuevo trabajo.

*Dibuja un cuadrado, un rectángulo, un rombo y un paralelogramo (no rectángulo). Guarda cada una de las figuras en una página, de acuerdo con la orden aprendida en el segundo ítem.*

Aprendamos una nueva orden que le dará color a nuestros trabajos:

FCOLOR ... significa "fija color" (la tortuga cambia de color y puede dibujar con diferentes colores: el color 0 es el negro y el color 1 es el blanco)

Por ejemplo, FCOLOR 1

*Realiza la actividad planteada en el primer ítem dibujando ahora cada triángulo con un color diferente.*

Para ello, experimenta el resto de los colores que se pueden usar (además del blanco y el negro ya vistos) sabiendo que pueden variar entre el 0 y el 255.

Otra orden le seguirá dando color a nuestros trabajos:

FCOLORF ... significa "fija color de fondo" (se usa de la misma forma que FCOLOR pero en este caso varía el color de fondo)

*Dibuja tres polígonos regulares (en distintas páginas de trabajo) combinando los colores de fondo y del trazo de la tortuga.*

La orden "repite" es una primitiva como lo son ad, at, bg, etc., son órdenes que la tortuga ya conoce, las tiene incorporadas como parte de su lenguaje. Por ejemplo: *repite 4 [ad 40 de 90]* ejecutará las órdenes "ad 40 de 90" cuatro veces seguidas.

*Utilizando esta nueva primitiva, dibuja un triángulo, un rectángulo y un hexágono.*

Una vez realizada esta primera guía de actividades, se puede comenzar a trabajar, de acuerdo con el nivel del curso y las expectativas del maestro, con otro tipo de estructuras que LOGO permite.

#### **IV. CABRI II**

CABRI II es un sistema de gráficos para construcciones geométricas, presentado en 1988 y construido por un equipo de profesores franceses dirigido por J.M. Laborde. El micromundo de CABRI permite la exploración de cualquier aspecto de las matemáticas susceptible de una interpretación geométrica. CABRI pone el énfasis en el proceso de hacer matemáticas y en la exploración de la naturaleza de la prueba en matemáticas.

Sus características son:

- ◆ Incluye geometría analítica, transformacional y euclídea.
- ◆ Permite la construcción intuitiva de puntos, rectas, triángulos, polígonos, círculos y otros objetos básicos.
- ◆ Efectúa traslaciones, ampliaciones y reducciones, giros (respecto de sus centros o puntos especificados, simetría, simetría axial e inversiones).
- ◆ Construye cónicas con facilidad.
- ◆ Explora conceptos avanzados en geometría descriptiva e hiperbólica.
- ◆ Anota y mide figuras (con actualización automática).
- ◆ Utiliza coordenadas cartesianas y polares.
- ◆ Proporciona la presentación de las ecuaciones de los objetos geométricos (rectas, circunferencias, elipses y coordenadas de puntos).
- ◆ Permite a los usuarios la creación de macros para figuras que se repiten con frecuencia.
- ◆ Permite al profesor configurar los menús de herramientas para centrarse en las actividades de los estudiantes.
- ◆ Comprueba las propiedades geométricas para probar hipótesis basadas en los cinco postulados de Euclides.
- ◆ Permite animación.
- ◆ Incluye ideas elementales sobre las propiedades de círculos y triángulos, sus interrelaciones y lugares geométricos.
- ◆ Las construcciones que permite hacer son las de “regla y compás”.
- ◆ Una limitación es que no permite construir semirectas ni medir ángulos no orientados.

Las instrucciones para el manejo del programa CABRI II se encuentran en muchos manuales, por ello a continuación solamente propondremos actividades para desarrollar con él en la enseñanza básica.

## ACTIVIDADES CON CABRI II EN LA ENSEÑANZA BÁSICA

### 1. Triángulos

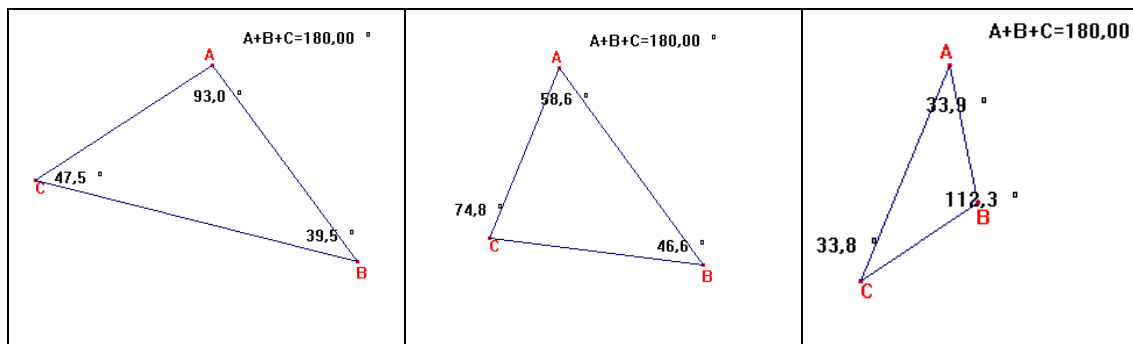
1. Construye un triángulo. Mide uno de sus ángulos. Modifica el triángulo para que el ángulo medido sea agudo, si no lo es ya, y para que sea obtuso.

2. Comprueba que la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ .

a) Construye un triángulo.

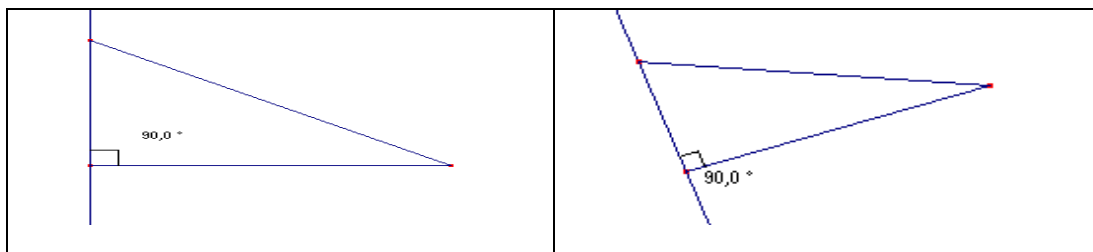
b) Mide cada uno de los ángulos.

c) Comprueba con la calculadora que su suma es  $180^\circ$ .



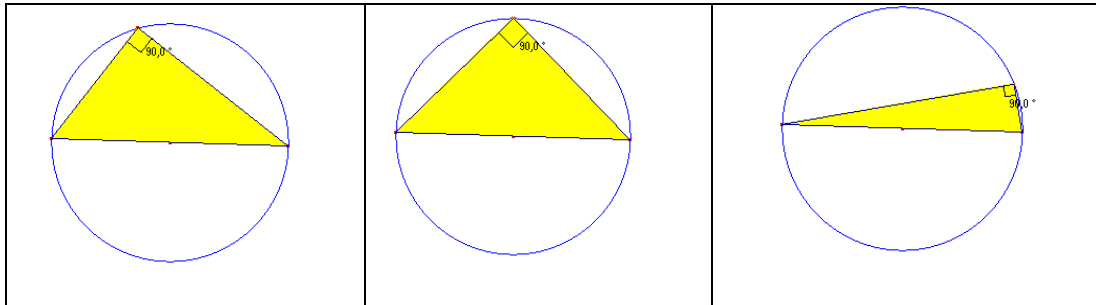
3.- Construye un triángulo rectángulo.

a) Traza un segmento y por uno de sus extremos una recta perpendicular. Sitúa un punto sobre esa recta. Define el triángulo sobre los extremos del segmento y el punto marcado. Comprueba que al variar el tamaño del segmento o el punto sobre la perpendicular, el triángulo sigue siendo rectángulo.



b) Construye un segmento. Determina su punto medio. Construye una circunferencia con centro en ese punto medio y radio la mitad de la longitud del

segmento. Define un triángulo tal que dos de sus vértices sean los extremos del segmento y el tercer vértice esté sobre la circunferencia. ¿Cuánto mide el ángulo del este tercer vértice?

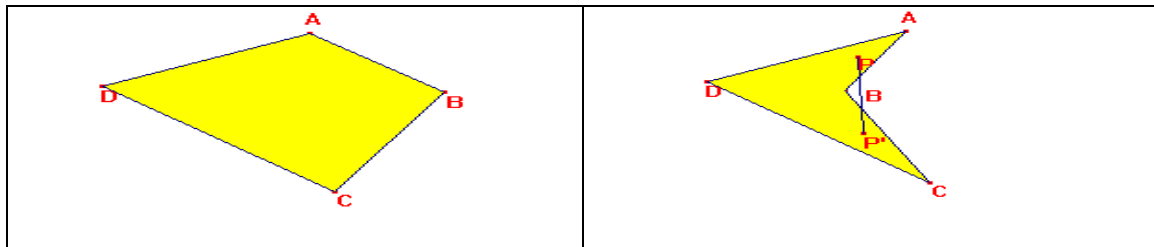


Has encontrado una forma de construir triángulos rectángulos.

## 2. Cuadriláteros

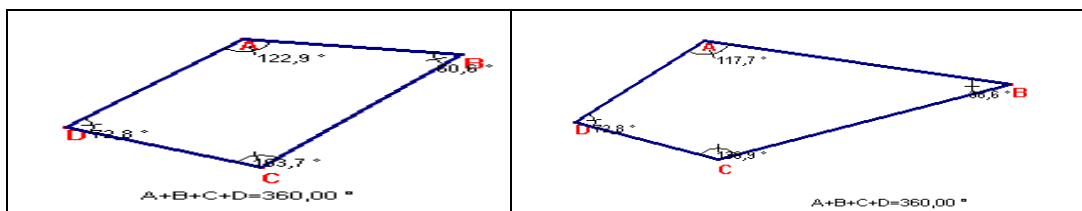
a) Dibuja un cuadrilátero. Para ello usa la opción construir polígono y pincha sobre cuatro puntos del plano (debes volver a pinchar sobre el punto inicial para cerrar el polígono).

b) Construye un cuadrilátero convexo y otro no convexo.



## 3. Suma de los ángulos de un cuadrilátero

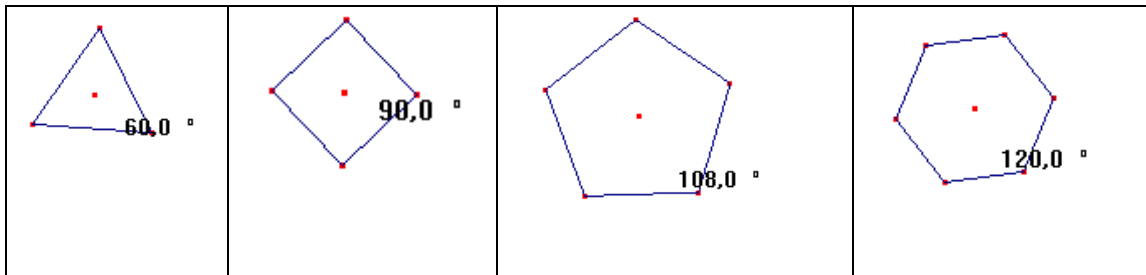
a) Dibuja un cuadrilátero, mide el valor de sus ángulos y súmalos con la calculadora.



- b) ¿Será cierto que la suma es siempre 360?
- c) ¿Podrías relacionar esto con que la suma de los ángulos de un triángulo sea 180°?

#### 4. Ángulos de polígonos regulares

- a) Construye polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... lados.
- b) Mide el ángulo interior de cada uno de ellos.



#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abraira, C. (2000). *Proyectos docente y de investigación*. Universidad de León.

Drenoyianni, H. y Selwood, I.D. (1998). Conceptions or misconceptions? Primary teachers' perceptions and use of computers in the classroom. *Education and Information Technologies*, 3, pp. 87-99.

Knupfer, N.N. (1993). Logo and Transfer of Geometry Knowledge: Evaluating the Effects of Student Ability Grouping. *School Science and Mathematics*, 93 (7), pp.360-368.

Mann, W. J. y Tall, D. (eds.) (1992). *Computers in the mathematics curriculum*. UK: The Mathematical Association.

Martin Y. (1994). *Experimenter en mathématiques avec Cabri-géomètre*. Tome 2. Argenteuil: Archimede.

Martín, J. F. (1997). *Cabri Géomètre II en la E.S.O.* Madrid: Faster.

Schumann, H. y Green. D. (1994). *Discovering geometry with a computer. Using Cabri Géomètre*. Sweden: Chartwell-Bratt.

Texas Instruments. *Cabri Géomètre. Manual para Macintosh y MS-DOS*.