Trazado de Potencial y Campo Eléctrico por Método de Iteración

Facultad de Ingeniería Electrónica
Universidad Santo Tomás de Aquino, Bogotá D. C.

Por medio del Método de Iteración se determinan las expresiones numéricas correspondientes para la variación del Campo y Potencial Eléctrico en dos variables, a partir de las condiciones de frontera dadas en las superficies conductoras. A partir de los resultados obtenidos se realizan las gráficas correspondientes.

By means of the Method of Iteration the corresponding numerical expressions for the variation of the Field and Electrical Potential in two variables are determined, from the given conditions of border in the conductive surfaces. From the obtained results the corresponding graphs are made.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando las complejidades de las fórmulas teóricas dificultan en forma considerable la solución analítica, se recurre a métodos no analíticos, los cuales comprenden los métodos gráficos, los métodos experimentales, los métodos analógicos y los métodos numéricos. Los métodos numéricos han ganado importancia y se han vuelto más atractivos a medida que los procesadores de los computadores incrementan su velocidad de procesamiento. Las técnicas numéricas simples de uso más común en electromagnetismo son el método de momentos, el método de diferencias y el método del elemento finito[1].

La técnica de métodos numéricos se debe interpretar como complementaria a la técnica de métodos analíticos y no como suplementaria.

[1] Todos es métodos numéricos se encuentran descritos en el libro "Elementos de Electromagnetismo" de Sadiku cap. 14.p.696-771.

En este caso nos concentramos en el método de las diferencias finitas la cual es una técnica numérica simple que se emplea para resolver ecuaciones diferenciales parciales como las que se utilizan analíticamente.

Aplicando el método de diferencias finitas para determinar el potencial eléctrico en una región, la región de la solución está dividida en mallas rectangulares con puntos de cuadrícula o nodos. A un nodo de la frontera de la región en la que se especifica el potencial se llama nodo fijado o definido, y a los interiores se les llama puntos libres.

Se obtiene la aproximación por diferencias finitas a la ecuación de Poisson para determinar los potenciales en todos los puntos libres.

Se recuerda que la ecuación de Poisson tiene por expresión:

$$\nabla^2 V = -\frac{r_v}{e} \qquad (1.1)$$

la cual tiene por diferencias finitas la siguiente ecuación:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{h^2 . r . s}{e}\right) \quad (1.2)$$

En donde h se le llama al tamaño de malla. Si la región de solución está libre de carga, la ecuación (1.2) se convierte en **Laplace**, que es la siguiente:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}\right) \quad (1..3)$$

Para aplicar la ecuación (1.3) a un problema determinado, se emplea comúnmente los métodos de iteración, método matriz en banda y método de relajación.

2. POTENCIAL Y CAMPO ELECTRICO EN UNA GUIA CONDUCTORA

Se dispone de una guía conductora de longitud infinita, como la que se muestra en la figura 1, conformada por cuatro superficies separadas entre sí por un GAP infinitesimal, evitándose con esto el contacto entre las mismas. Como se observa en la figura, cada una de las superficies se encuentra a un potencial dado.

Para nuestro caso particular los potenciales son:

V1 = 0V; V3 = -10V;

V2 = 5V; V4 = 4V;

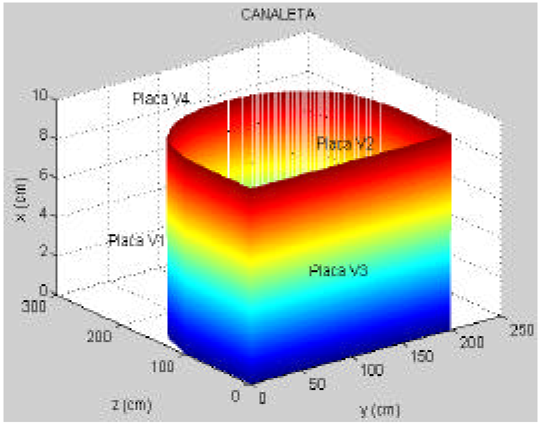

Figura 1. Guía Conductora

Tomamos como simetría al eje cartesiano teniendo variación en los ejes z y y, obteniéndose como gráfica en estas dos dimensiones la figura 2.

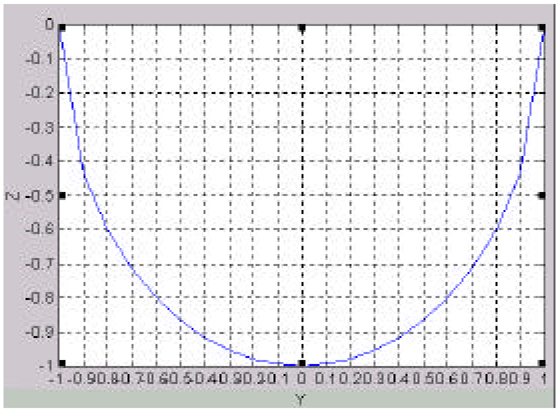

Figura 2. Guía Conductora vista en el plano z y

Para solución a este problema tomamos el método de iteración. Se divide la región en mallas cuadradas; el número de puntos de la cuadrícula a lo largo y ancho es de 201. El tamaño de malla es h = 2/200 = 0.01m.

Para este cálculo nos valemos del programa **Matlab 5.3**, en donde para describir la malla construimos una matriz de 200x200 y a cada nodo libre se le asigna el valor de 0 y a cada nodo fijo los valores correspondientes de frontera. Aplicando un determinado número de iteraciones hechas con la ecuación (1.3) a la matriz anterior se obtiene un valor aproximado del potencial en todos los del puntos encerrados por las superficies.

La exactitud del problema depende del número de iteraciones que se repitan sobre la matriz y también del tamaño de la cuadrícula.

En la figura 3 se muestra la gráfica del potencial V(y,z) que fue obtenido luego de 15 iteraciones en el programa **"potencial1.m"** el cual es anexado.

Para calcular el Campo Eléctrico recurrimos a:

$$E = -\nabla V \qquad (2.1)$$

aplicando la definición de derivada a (2.1), el campo queda como:

$$E = -\frac{1}{2}\left[\left(V_{(i+1,j)} - V_{(i-1,j)}\right)\hat{a}y + \left(V_{(i,j+1)} - V_{(i,j-1)}\right)\hat{a}z\right] \qquad (2.2)$$

En la anterior derivada se muestra la variación que tiene el campo en dirección de sus componentes uy, uz.

Para graficar dicho Campo se toma la norma de éste la cual está definida como:

$$\|E\| = -\frac{1}{2}\sqrt{\left[\left(V_{(i+1,j)} - V_{(i-1,j)}\right)^2 + \left(V_{(i,j+1)} - V_{(i,j-1)}\right)^2\right]} \qquad (2.3)$$

En la figura 5 se muestra la gráfica de la norma del Campo la cual fue obtenida luego de 15 iteraciones en el programa **"campo1.m"** el cual es anexado.

Para la densidad superficial de carga ρs, según la ecuación:

$$\rho s = \|E\| * \varepsilon_0 \qquad (2.4)$$

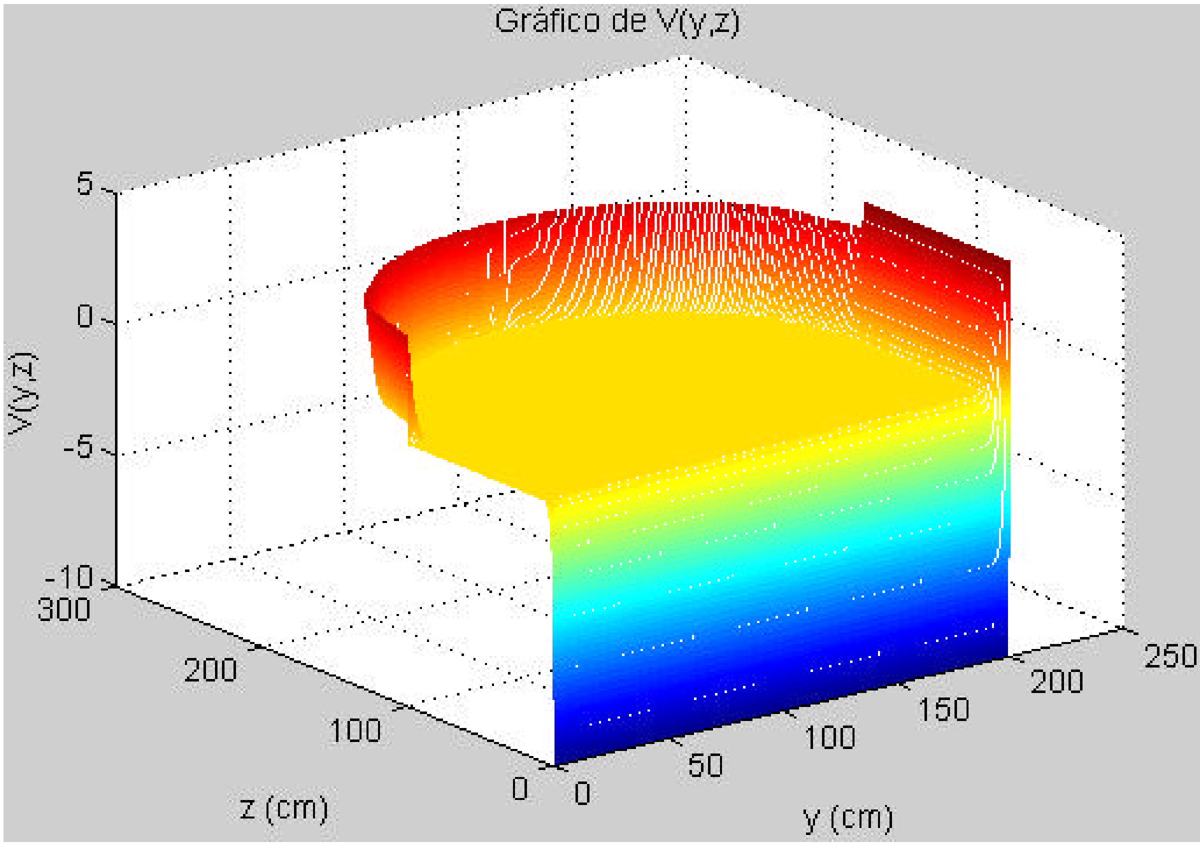

Figura 3. Potencial V(y,z)

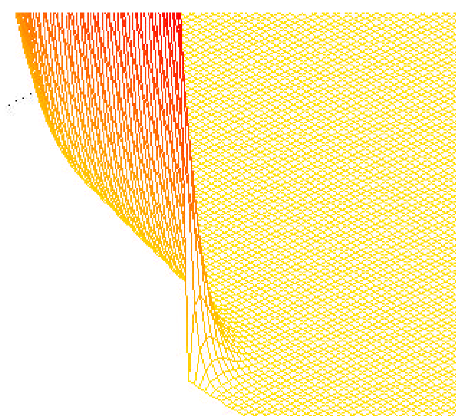

Figura 4. Acercamiento en una de las fronteras del Potencial V(y,z)

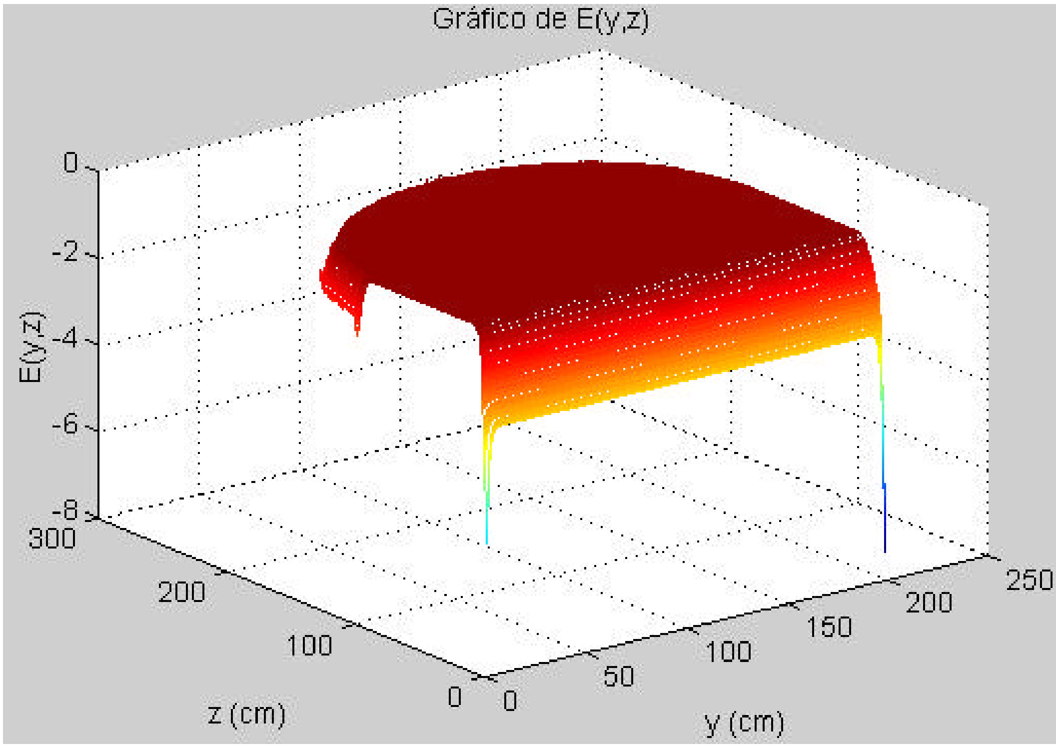

Figura 5 . Campo Eléctrico E(y,z)

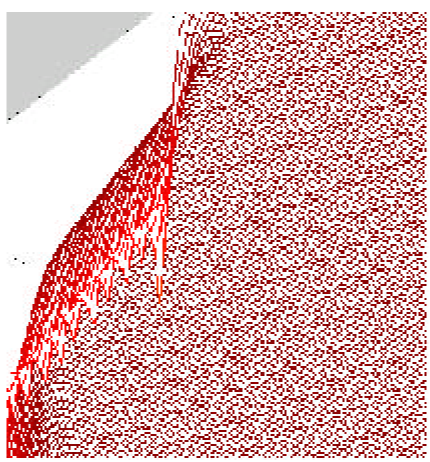

Figura 6 . Acercamiento Campo Eléctrico E(y,z)

3. CONCLUSIONES

- La exactitud de los resultados obtenidos depende de dos factores que son: el número de divisiones de la cuadricula y el número de iteraciones que repite el calculo.

- Para decidir cual es el número de iteraciones se debe tener en cuenta la capacidad del procesador del computador debido a que si es muy grande el número y el procesador no es muy potente, se puede bloquear el computador o demorarse mucho tiempo en realizar todas las iteraciones.

- Puede verse en las gráficas de Campo y Potencial Eléctrico que el comportamiento en las esquinas de las fronteras es distinto al que se observa a cuando se encuentra en los puntos intermedios.

- Cuando se trabaja con una matriz muy grande, la memoria que dispone el workspace de Matlab no alcanza a mostrar todos los términos de la matriz.

- Se observa que los valores significativos de potencial se encuentran es cerca a las superficies de frontera y en el centro es muy aproximado a cero.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Elementos de electromagnetismo. Sadiku, Matthew. Segunda Edición. Compañía Editorial Continental, S. A. México. 1998.

- Análisis numérico y visualización con MATLAB. Nakamura, Schoichiro. Prentice_Hall Hispanoamericana, S. A. México. 1997.