

“ Analisis de las vibraciones libres de una cuerda tensa, con extremos fijos ”

Facultad de Ingeniería Electrónica
 Universidad Santo Tomás de Aquino. Santafé de Bogotá D.C. Octubre 21 de 1999

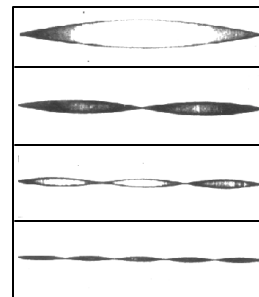
Se determinan la ecuación diferencial de movimiento, su solución. se determinan la energía total de la cuerda en termino de los armónicos excitados; por ultimo se diseña un filtro para eliminar la contribución del primer armónico. A partir de los resultados obtenidos se realizan las gráficas correspondientes.

They are determined the differential equation of movement, their solution. they are determined the total energy of the rope in I finish of the excited harmonic; for I finish a filter it is designed to eliminate the contribution of the first harmonic. Starting from the obtained results they are carried out the corresponding graphs.

1.INTRODUCCION

El estudio de las cuerdas vibrantes tiene una larga historia. Naturalmente, la razón consiste en el empleo musical, desde tiempo inmemorial, de cuerdas tensas¹. Nos interesan aquí, sin embargo, no los efectos musicales sino el hecho mecánico básico de que una cuerda, con ambos extremos fijos, tienen un numero de estados de vibración natural bien definidos, Dichos estados se denominan vibraciones estacionarias, en el sentido de que cada punto de la cuerda vibra transversalmente con un movimiento armónico simple de amplitud constante, cuya frecuencia de vibración es la misma para todas las partes de la cuerda. Dichas vibraciones estacionarias representan lo que se denominan modos normales de la cuerda. En todos ellos, excepto en el inferior, existen puntos en que los desplazamiento permanecen nulos en todo instante. Estos son los nodos; las posiciones de amplitud máxima se denominan antinodos. Uno puede pensar así que estos estados básicos de vibración son estacionarios en el sentido adicional de que los nodos permanecen en puntos fijos sobre la cuerda. Esto se ve de modo especialmente claro en la figura 1 debido a que las fotografías se han tomado con exposición.

Figura 1



Vibraciones de una cuerda en diversos modos simples (n=1, 2, 3, 5).

2. ANALISIS DEL PROBLEMA

Se tiene una cuerda elástica de longitud L y densidad de masa p que se encuentra fija en ambos extremos y es sometida a una tensión T. Si para t=0 la cuerda se suelta desde la configuración inicial:

$$\psi(x,0)= \begin{cases} AX & 0 \leq X \leq L/4 \\ AL/4 & L/4 < X < 3L/4 \\ A(L-X) & 3L/4 \leq X \leq L \end{cases} \quad \text{Ec. 1}$$

¹ Se dice que Pitagoras había observado como la división de una cuerda tensa en dos segmentos daba sonidos agradables si la longitud de dichos segmentos estaban a una razón simple.

1. Determinar el desplazamiento de la cuerda $\psi(x,t)$ para todo t si se suelta con velocidad inicial nula.

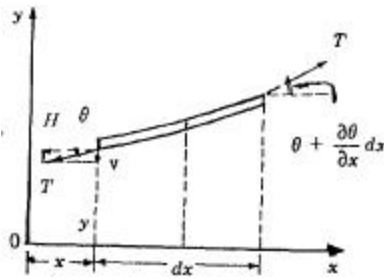


Figura 2

Como se busca $\psi(x,t)$ y suponiendo que $y \ll L$ obtendremos un problema lineal del cual tendremos que por medio de un análisis hecho con una ecuación de movimiento a una llamada ecuación de ondas unidimensional:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r}{T} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{Ec. 2}$$

Se definen condiciones de frontera:

$$\Psi = (0,t) = 0 \quad \Psi = (L,t) = 0$$

Por el método de separación de variables obtenemos fácilmente la solución de la ecuación.

Solución General:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{Sen} K_n x \text{Cos} \omega_n t_0 \quad \text{Ec. 3}$$

$$K_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{Ec. 4}$$

$$\omega_n = K_n \sqrt{\frac{T}{r}} \quad \text{Ec. 5}$$

Los valores ω_n son los "valores propios"² del problema y representan físicamente, las frecuencias de vibración.

Si $t = t_0$ (cte)

$$\Psi(x,t_0) = \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{Sen} K_n x \text{Cos} \omega_n t_0$$

$$a_n = A_n \text{Cos} \omega_n t_0$$

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} K_n x \quad \text{Ec. 6}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Psi(x) \text{Sen} K_n x dx \quad \text{Ec. 7}$$

Se obtiene de reemplazar los valores de las ecuaciones 4 y 5:

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/4} Ax \text{Sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx + \int_{L/4}^{3L/4} \frac{AL}{4} \text{Sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx + \int_{3L/4}^L A(L-x) \text{Sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \right]$$

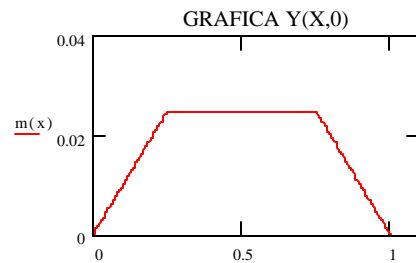
$$a_n = \frac{2LA}{(n\pi)^2} \left(\text{Sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) + \text{Sen} \left(\frac{3n\pi}{L} \right) \right)$$

Ec. 8

La ecuación 8 muestra el valor de a para cada término en la sumatoria, reemplazándolo en la ecuación 6, encontramos $\psi(x)$.

- Realizar la gráfica de la función $\psi(x,0)$ y sus primeros 5 armónicos excitados si $L = 1\text{m}$, $T = 0.1\text{N}$, $\rho = 10^{-3}\text{Kg./m}$, $A = 0.1$.

De la ecuación 1 se obtiene la siguiente gráfica:



Gráfica1. Función dada

² O también autovalores.

Se encuentran los 5 primeros armónicos que componen la serie, así:

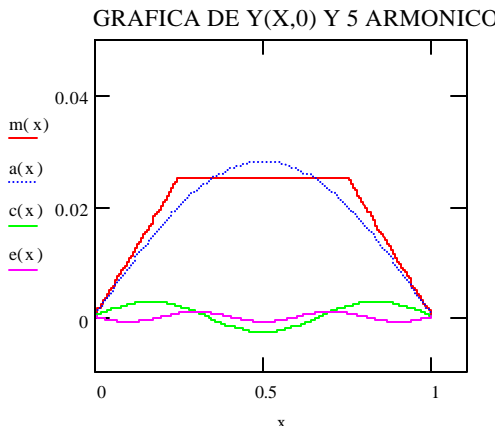
El segundo y cuarto término de la serie no aportan nada al sistema.

$$a(x) = A_1 \text{Sen}\left(\frac{P}{L} \cdot 1 \cdot x\right)$$

$$c(x) = A_3 \text{Sen}\left(\frac{P}{L} \cdot 3 \cdot x\right)$$

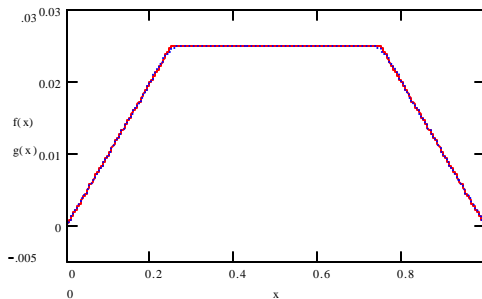
$$e(x) = A_5 \text{Sen}\left(\frac{P}{L} \cdot 5 \cdot x\right)$$

En la gráfica se puede observar que es el primer armónico el que más aporta a la función, lo que se podrá comprobar mas adelante en el espectro de energías.



Gráfica2.

Se continúan hallando términos en la serie hasta que la resolución de la pantalla en el computador no permita diferenciar entre la gráfica original y el resultado de la sumatoria como se ve en la gráfica 3.



Gráfica3.

La gráfica 3 muestra la función(rojo), y la sumatoria de los 19 primeros armónicos(azul).

3. Haciendo uso de Mathcad, graficar la función $\psi(x,t)$ para diferentes instantes, hasta completar medio periodo de oscilación.

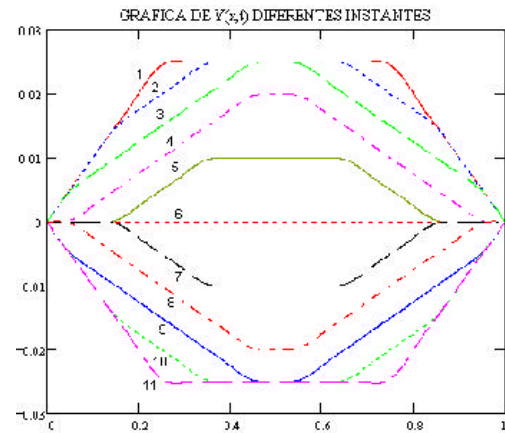
Sabemos que de la ecuación 5

$$\omega_1 = \frac{P}{L} \sqrt{\frac{T}{r}} \equiv 31.4 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Por lo tanto el periodo medio es

$$T_{1/2} = 0.1 \text{ segundos}$$

será la frecuencia del primer modo normal.



Gráfica 4.

Aquí podemos ver como se moverá la cuerda a través del tiempo.

4. Determinar la energía total de la cuerda en términos de la contribución de cada uno de los armónicos excitados.

$$E = E_c + E_p$$

$$E_c = \frac{L}{4} r \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 A_n^2 \text{Sen}^2 \omega_n t$$

$$E_p = \frac{1}{4} T \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 K_n^2 \text{Cos}^2 \omega_n t$$

$$E = \frac{TP^2}{4L} \sum n^2 A_n^2 = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

Figura 3.

Funcionamiento:

En principio se tiene una cuerda elástica conductora a la cual se le sujeta un imán, el cual oscila a la misma frecuencia a la que lo hace la cuerda (La frecuencia de oscilación en cualquier parte de la cuerda es la misma).

El sistema es atravesado por un campo magnético uniforme entrante.

El imán anteriormente mencionado, genera un flujo magnético variable, el cual atraviesa las espiras de un bobinado y así se genera una fem inducida.

Este voltaje tiene la característica de poseer la misma frecuencia de oscilación de la cuerda. Aprovechando esta cualidad podemos por medio de un filtro pasa banda estrecho en serie con un comparador, obtener una señal de disparo a la frecuencia del primer armónico para la cual se activara un relé.

El relé cierra el circuito cuando la cuerda esta oscilando a la frecuencia del primer armónico, Este esta compuesto por la cuerda conductora y un subcircuito (RLC) que resonara a la frecuencia del primer armónico. Produciendo así un filtrado de la contribución del primer armónico al sistema. Cuando la frecuencia de la cuerda cambie , el rele desconectara el circuito , y no se vera afectado ninguno de los otros armonicos.

En proceso del filtrado del primer armonico de la cuerda se ha considerando , la no existencia de gravedad, la cuerda carece de resistencia, la influencia del campo externo en el campo magnético del imán es nula, el tiempo de reacción tanto del pasabanda como del comparador es 0.

CIRCUITOS PROPUESTOS :

Pasa banda estrecho: Este filtro se puede hacer tanto activo (Con amplificadores operacionales), como pasivo(RLC), lo mas importante de el diseño es tener en cuenta que la frecuencia de resonancia (fR) tiene que ser la misma del primer armonico de la cuerda asi.

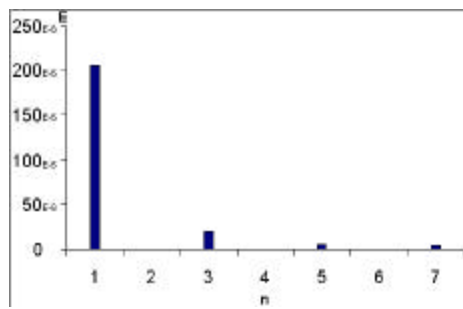
$$E_1 = \frac{Tp}{4L} 1^2 A_1^2 = 2.06508 E - 4$$

$$E_3 = \frac{Tp}{4L} 3^2 A_3^2 = 1.99 E - 5$$

$$E_5 = \frac{Tp}{4L} 5^2 A_5^2 = 6.16 E - 6$$

$$E_7 = \frac{Tp}{4L} 7^2 A_7^2 = 4.13 E - 6$$

- Realizar la gráfica del espectro de energía para la cuerda (E1:vs:n).

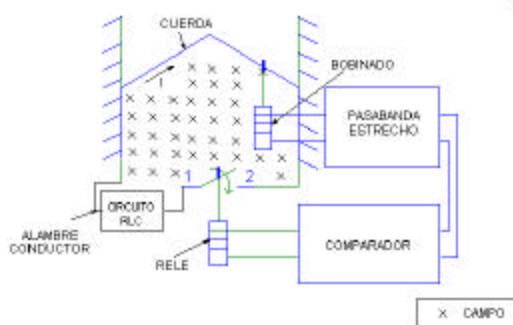


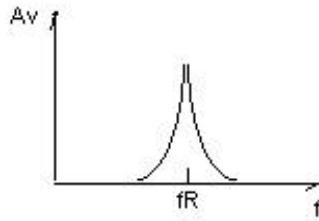
Gráfica 5.

Se puede ver claramente en la figura 5 que es el primer armónico el que aporta la mayor parte de energía al sistema.

- Diseñar un filtro** que elimine la contribución del primer armónico excitado.

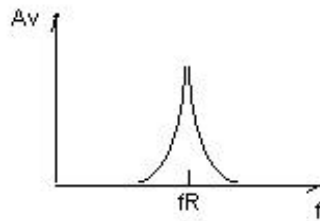
FILTRO



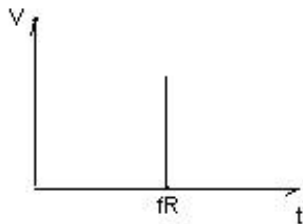


Comparador: La función de este circuito es disparar una señal DC cuando la frecuencia de la fem inducida sea exactamente igual a la frecuencia de oscilación del primer armónico, este sistema comparar los valores de voltaje en la salida del pasa banda, con un nivel n dependiente de el máximo valor de la fem inducida en el bobinado y a su vez por la configuración de A_v del pasabanda a la frecuencia determinada así:

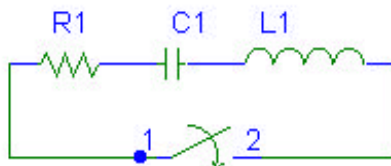
ENTRADA DEL AMPLIFICADOR



SALIDA DEL COMPARADOR



SUBCIRCUITO RLC:



Después de que el relé, activa nuestro subcircuito , diseñado para resonar a la

frecuencia del primer armónico al que vibra la cuerda, la energía de la cuerda es transferida al circuito RLC. El cambio de frecuencia en la vibración de la cuerda hace que el circuito que controla relé lo desactive y a su vez como este esta conectado mecánicamente al swicht del subcircuito , la energía es finalmente disipada por la resistencia.

El circuito que proponemos para este caso es un sistema RLC serie con un interruptor que esta interconectado mecánicamente con el relé de forma que cuando uno se abre el otro se cierra y viceversa:

La frecuencia del primer modo normal es

$$\omega_1 = 31.416$$

$$\omega_1 = \omega_R$$

Donde en resonancia

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Asumimos el valor de $C=2\text{mf}$
Entonces $L=0.51\text{H}$

$$AB = \frac{R}{L}, \quad Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}$$

Para nuestro circuito necesitamos que AB sea lo mas pequeña posible y a su vez el factor de calidad tiene que ser pequeño, tambien sabemos que el factor de calidad esta definido como

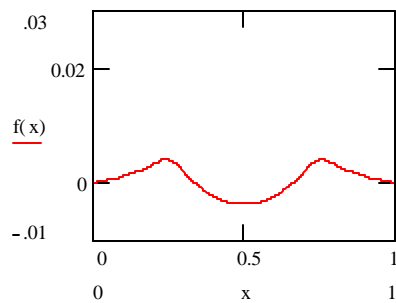
$$Q = 2p \frac{(\text{maxima} - \text{energia} - \text{almacenada})}{(\text{energia} - \text{dipada} - \text{por} - \text{ciclo})}$$

Para nuestro circuito necesitamos que Q sea lo mas bajo es decir que R sea alto.

$$R=2K$$

$$Q=7.98E-4.$$

- Realizar una gráfica de la función sin la presencia del primer armónico que ha sido filtrado.



Se observa la importancia del primer armónico en la suma total de los infinitos armónicos.

CONCLUSIONES

El desplazamiento promedio de la cuerda es nulo, por lo que podemos afirmar que lo que viaja de un punto a otro de la cuerda es una energía transferida.

Claramente pudimos observar que la mayor parte de la energía es dada por el primer armónico y la contribución de los armónicos pares es 0

Como todas las frecuencias posibles de una cuerda son simplemente enteros de la frecuencia mas baja posible (w_1), afirmamos que este modo básico es el fundamental.

La suma de la energía cinética y la energía potencial en todo instante es constante.

REFERENCIAS

[1].El principio y algunos conceptos importantes (sin reunir un analisis tan detallado en resolucion de ecuaciones) de modos vibracionales de una cuerda es tratado en el libro "Vibraciones y ondas" de A.P. French (Editorial Paraninfo. Madrid. España.1982).370.

[2].La solucion de circuitos pasabnada es tratado ampliamente en el libro titulado "Análisis de Circuitos serie Shawm" (Grupo editorial iberoamerica. Mexico. 1984).261.